摘 要

关于球面中紧致极小子流形某些曲率的 Pinching 问题,即通常所谓的内蕴刚性,文[1],[2],[3],[4]已经有了许多好的结果,这些结果大部分是用第二基本形式模长的平方,截面曲率,Ricci 曲率来刻画的,本文首先讨论了球面中具有平行中曲率向量的紧致正截面曲率子流形,通过对子流形的黎曼曲率张量长度平方的限制,得到了球面中该类子流形的一些性质.另外,该文还讨论了球面中具有平行中曲率向量的紧致伪脐子流形,通过对一个算子的最小特征值的限制,对该类子流形的第二基本形式模长的平方进行了估计.最后,作者将外围空间进行扩大,讨论了局部对称共形平坦黎曼流形中具有平行中曲率向量的紧致伪脐子流形,推广了徐兆棣文[8]中的结果.

关键词：球面；平行中曲率向量；局部对称空间；共形平坦；伪脐子流形

www.docin.com

Abstract

Content: Some curvature problems about the compact minimal submanifold in sphere, It is usually called intrinstic rigidity ,papers[1],[2],[3],[4] have obtained many good results. Those results are usually described with the square of the length of the second fundamental form ,scalar curvature ,Ricci curvature.At first, this paper considers submanifold with pararrel mean curvature vector and positive scalar curvature in a sphere, make use of the sphere of the length of the Riemanian curvature tensor, some intrinstic rigidity results are obtained .Second, the author considers the compact pseudoumbilical submanifold with pararrel mean curvature vector in sphere. We use the minimal eigenvalue of a operator ,we estimates the sphere of length of the second fundamental form. At last ,the author explodes the ambient space ,considers the pseudoumbilical submanifold with pararrel mean curvature vector in locally symmetric and comformally flat manifold, so the correspond results due to Xu Zhao-di[8] are generalized.

Key words: sphere; pararrel mean curvature vector; locally symmetric space; comformally flat; pseudoumbilical submanifold

www.docin.com

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：胡名成　　签字日期：2007年6月6日

学位论文版权使用授权书

www.docin.com

本学位论文作者完全了解江西师范大学研究生院有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权江西师范大学研究生院可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：胡名成　　导师签名：

签字日期：2007年6月6日　　签字日期：2007年6月6日

1 准备工作

我们用S^{n+p}表示(n+p)维球面，用N^{n+p}表示(n+p)维局部对称共形平坦黎曼流形，M^n表示它们的n 维子流形，S表示M的第二基本形式模长的平方.H为M的中曲率，本文中约定$H \neq 0, \omega_{ij}$和Ω_{ij}分别称为Riemann联络的联络形式和曲率形式，ω_{ij}是一次微分形式，Ω_{ij}是二次微分形式，R_{ijkl}为Riemann联络的曲率张量场，K_{ABCD}为黎曼流形N^{n+P}的曲率张量场，K_{AB}为N^{n+P}的Ricci曲率，R_{ijij}为M^n的截面曲率，$R_{\alpha\beta jk}$为M^n的法曲率张量.K 为数量曲率，h_{ij}^{α}为第二基本形式在标准基下的分量，trH_{α}表示矩阵$H_{\alpha}=(h_{ij}^{\alpha})$的迹.选取外围空间的幺正局部标架场$e_1,\ldots\ldots e_{n+p}$，使限制于$M^n$时，$e_1,\ldots\ldots e_n$是$M^n$的切向量，约定指标范围是

$$1 \le A,B,C,\ldots \le n+p, 1 \le i,j,k,\ldots \le n, n+1 \le \alpha,\beta,\gamma,\ldots \le n+p$$

令$\omega_1,\ldots\ldots\omega_{n+p}$为$e_1,\ldots\ldots e_{n+p}$的对偶标架场.

外围空间有如下结构方程

$$d\omega_{AB}=-\sum_{B}\omega_{AB}\Lambda\omega_{B}, \omega_{AB}+\omega_{BA}=0 \tag{1.1}$$

$$d\omega_{AB}=-\sum_{C}\omega_{AC}\Lambda\omega_{CB}+\frac{1}{2}\sum_{CD}K_{ABCD}\omega_{C}\Lambda\omega_{D} \tag{1.2}$$

当外围空间是S^{n+p}时，有

$$K_{ABCD}=(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC}) \tag{1.3}$$

当外围空间是局部对称共形平坦黎曼流形时，有

$$\mathrm{K}_{\mathrm{ABCD}}=\frac{1}{\mathrm{n}+\mathrm{p}-2}\{\delta_{\mathrm{AC}}\mathrm{K}_{\mathrm{BD}}-\delta_{\mathrm{AD}}\mathrm{K}_{\mathrm{BC}}+\mathrm{K}_{\mathrm{AC}}\delta_{\mathrm{BD}}-\mathrm{K}_{\mathrm{AD}}\delta_{\mathrm{BC}}$$

$$-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}+\mathrm{p}-1}(\delta_{\mathrm{AC}}\delta_{\mathrm{BD}}-\delta_{\mathrm{AD}}\delta_{\mathrm{BC}}) \tag{1.4}$$

$$K_{AB}=\sum_{C}K_{ACBC}, K=\sum_{A}K_{AA} \tag{1.5}$$

因为N是局部对称的，即K_{ABCD}的协变导数为0，故K为常数.

当限制在M上时，有

$$\omega_{\alpha}=0, \omega_{\alpha i}=\sum_{j}h_{ij}^{\alpha}\omega_{j}, h_{ij}^{\alpha}=h_{ji}^{\alpha} \tag{1.6}$$

www.docin.com

$$d\omega_{ij} = -\sum_{k}\omega_{ik}\Lambda\omega_{kj} + \frac{1}{2}\sum_{kl}R_{ijkl}\omega_{k}\Lambda\omega_{l} \tag{1.7}$$

其中

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} + \sum_{\alpha}(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}) \tag{1.8}$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma}\omega_{\alpha\gamma}\Lambda\omega_{\gamma\beta} + \frac{1}{2}\sum_{jk}R_{\alpha\beta jk}\omega_{j}\Lambda\omega_{k} \tag{1.9}$$

其中

$$R_{\alpha\beta jk} = K_{\alpha\beta jk} + \sum_{i}(h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta} - h_{ij}^{\beta}h_{ik}^{\alpha}) \tag{1.10}$$

当外围空间是S^{n+p}时，有

$$R_{\alpha\beta kl} = \sum_{i}(h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta} - h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}) \tag{1.11}$$

现在用h_{ijk}^{α}和h_{ijkl}^{α}表示h_{ij}^{α}在切丛联络与法丛联络直和下的协变导数，则

$$h_{ijk}^{\alpha} - h_{ikj}^{\alpha} = -K_{\alpha ijk} \tag{1.12}$$

$$h_{ijkl}^{\alpha} - h_{ijlk}^{\alpha} = \sum_{m}h_{mj}^{\alpha}R_{mikl} + \sum_{m}h_{im}^{\alpha}R_{mjkl} - \sum_{\beta}h_{ij}^{\beta}R_{\alpha\beta kl} \tag{1.13}$$

引理 1[5] 设M^n是N^{n+p}的 n 维黎曼流形，$\tau = \sum_{\alpha=n+1} trH_{\alpha}^{2}$,则

(1) $\tau^2 \geq \sum_{\alpha=n+1}[tr(H_{\alpha}^{2})]^2 \geq \frac{1}{p-1}\tau^2$

(2) $\sum_{\alpha,\beta=n+1}[tr(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2] \leq \frac{p-2}{p-1}\tau^2$

(3) $\sum_{\alpha,\beta=n+1}[tr(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2] \leq \frac{n}{2}\sum_{\alpha,\beta=n+1}[tr(H_{\alpha}H_{\beta})]^2$

引理 2[5] 设M^n是N^{n+p}的 n 维黎曼流形，则

(1) $S^2 \geq \sum_{\alpha}[tr(H_{\alpha}^{2})]^2 \geq \frac{1}{p}S^2$

(2) $\sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2] \leq \frac{p-1}{p}S^2$

(3) $\sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2] \leq \frac{n}{2}\sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}H_{\beta})]^2$

引理 3[5] (Hopf 引理)：设(M^n, g)是 n 维紧致连通的黎曼流形，$f \in C^{\infty}(M;R)$，若$\Delta f \geq 0$(或$\Delta f \leq 0$)，则 f=const.

www.docin.com

2 主要结果

本论文研究了两类空间中的子流形：球面中的子流形和局部对称共形平坦黎曼流形中的子流形，做了三个方面的工作，列举如下：

文[1],[2],[3],[4]关于球面中的紧致极小子流形或者是具有平行中曲率向量子流形的某些曲率的 Pinching 问题,已经有了许多好的结果,这些结果大部分是用第二基本形式模长的平方,截面曲率,Ricci 曲率来刻画的, 比如说：

定理[4] 设 M 是 n 维紧致 Riemann 流形，浸入在(n+p)维单位球面中，具有平行中曲率向量，P>1,若 $(\sqrt{n}+3-\frac{1}{p-1})S\le n$，则 M 为 S^{n+p} 中的一个(n+1)维全测地子流形的超曲面.

定理[2] 设 M^n 是 S^{n+p} 中的紧致极小子流形，若

$$R_{ijij}\ge\frac{p-1}{2p-1}$$

则 M^n 是全测地的，或 M^n 是 S^{n+p} 中的 Clifford 曲面，或 $M^n=S^2(\sqrt{3})$ 是 $S^4(1)$ 中的 Veroness 曲面.

这篇论文第一个工作是研究了球面中具有平行中曲率向量的紧致正截面曲率子流形,通过对子流形的黎曼曲率张量长度平方 q 的限制,得到了定理 1.

定理 1 设 M 是(n+p)维球面 S^{n+p} 中的具有平行中曲率向量的 n 维紧致正截面曲率子流形,如果 $(\frac{1}{2n}+1)q\le n(n-1)-n(p-1)(1+H^2)^2$,则 M 是全脐子流形.

吴传喜在文[6]中利用算子 $L=-\Delta-S$ 的最小特征值的估计,其中 Δ 为 M 上作用在函数上的 Laplacian, 给出了 Clifford 极小超曲面的一个特征,得到

定理 设 M 是 S^{n+1} 的紧致极小超曲面,如果算子 $L=-\Delta-S$ 的最小特征值 λ_1 不小于 -n, 则 M 或者是全测地的, 或者是一 Clifford 极小超曲面 $S^k(\sqrt{\frac{k}{n}})\times S^{n-k}(\sqrt{\frac{n-k}{n}})$,k 为小于 n 的正整数.

若对于实数 λ,方程 $Lf=\lambda f$ 有非平凡解,则称 λ 是 L 的一个特征值.

这篇论文第二个工作是利用了吴传喜文[6]中的思想,考虑算子 $L=-\Delta-\frac{3}{2}S$.

通过对算子$L=-\Delta-\frac{3}{2}S$的最小特征值的估计,给出了(n+p)维球面S^{n+p}中紧致的具有平行中曲率向量的伪脐子流形的一个特征，得到了定理 2.

定理 2 设 M 是(n+p)维球面S^{n+p}中紧致的具有平行中曲率向量的 n 维伪脐子流形,如果算子$L=-\Delta-\frac{3}{2}S$的最小特征值λ_1不小于$-nH^2$,则

(1) M^n具有平行的第二基本形式.

(2) $S\le pn(1+H^2)$.

徐兆棣在文[8]中证明了

定理 设M^n是局部对称共形平坦黎曼流形N^{n+p}中的紧致极小子流形且M^n的法丛是平坦的,若

$$S<\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})$$

则,M^n是全测地子流形.

这篇论文第三个工作是将徐兆棣在文[8]中结果中的子流形扩大到具有平行中曲率向量的伪脐子流形,并且删除了M^n是法丛平坦这一条件，得到了定理 3 和定理 4.

定理 3 设M^n是局部对称共形平坦黎曼流形N^{n+p}中具有平行中曲率向量的 n 维紧致伪脐子流形,若

$$S\le\frac{p-1}{3p-5}[nH^2+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})]$$

则,M^n是全脐子流形.

定理 4 设M^n是局部对称共形平坦黎曼流形N^{n+p}中具有平行中曲率向量的 n 维紧致伪脐子流形,若

$$S\le\frac{1}{n+1}[nH^2+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})]$$

则,M^n是全脐子流形.

3 定理的证明

3.1 定理 1 的证明

设M^n是球面S^{n+p}中的具有平行中曲率向量的紧致正截面曲率子流形,$\overline{H}$为M的中曲率向量，M的Ricci曲率张量定义为$\sum_{ij} R_{ij}\omega_i\omega_j$,其中,$R_{ij}=\sum_k R_{ikjk}$,其长度的平方为$r=\sum_{ij} R_{ij}^2$,M的数量曲率为$R=\sum_{ik} R_{ikik}$,M的黎曼曲率张量长度的平方为$q=\sum_{ijkl} R_{ijkl}^2$.

在证明定理 1 之前，首先给出两个命题.

命题 1[5] 设(M^n,g)是$(N^{n+p},\overline{g})$的子流形，如果M是具有平行中曲率向量的子流形,则

$$\sum_k h_{kki}^\alpha = 0, \quad 且 \quad \sum_k h_{kkij}^\alpha = 0, \alpha = n+1,\cdots,n+p.$$

命题 2[5] 设M^n是球面S^{n+p}中的具有平行中曲率向量的紧致正截面曲率子流形,则M^n是伪脐子流形，即

$$h_{ij}^{n+1} = H\delta_{ij}$$

证明 因为M是球面S^{n+p}中的具有平行中曲率向量的子流形,故H为常数,选取e_{n+1}为单位平均曲率向量，e_{n+1}在法丛中平行，故有

$$\omega_{n+1,\alpha} = 0, \sum_k h_{kkij}^\alpha = 0 \tag{3.1}$$

$$\alpha = n+1, \sum_k h_{kk}^\alpha = nH, \alpha \neq n+1, \sum_k h_{kk}^\alpha = 0 \tag{3.2}$$

对$\omega_{n+1,\alpha}=0$外微分，得

$$\begin{aligned} 0 = d\omega_{n+1,\alpha} &= \sum_i \omega_{n+1,i}\Lambda\omega_{i\alpha} + \sum_\beta \omega_{n+1,\beta}\Lambda\omega_{\beta\alpha} \\ &= \sum_i \omega_{n+1,i}\Lambda\omega_{i\alpha} = -\sum_{ijk} h_{ij}^{n+1}h_{ik}^\alpha\omega_j\Lambda\omega_k \\ &= -\sum_{j<k}\sum_i (h_{ij}^{n+1}h_{ik}^\alpha - h_{ik}^{n+1}h_{ij}^\alpha)\omega_j\Lambda\omega_k \\ &= -\sum_{j<k} R_{n+1\alpha jk}\omega_j\Lambda\omega_k \end{aligned} \tag{3.3}$$

所以，有

$$R_{n+1\alpha jk}=0,(H_{n+1}H_{\alpha}=H_{\alpha}H_{n+1}) \tag{3.4}$$

另外，由文献[5]，有

$$\sum_{\alpha}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=\sum_{\alpha}\sum_{ijk}h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha}+\sum_{\alpha\beta}\sum_{ijk}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}$$
$$+\sum_{\alpha}\sum_{ijkm}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk}+h_{im}^{\alpha}R_{mkjk}) \tag{3.5}$$

由(3.1),(3.4)可知(3.5)式为

$$\sum_{ij}h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1}=\sum_{ijkm}h_{ij}^{n+1}(h_{mk}^{n+1}R_{mijk}+h_{im}^{n+1}R_{mkjk})$$

因为 $H_{n+1}=(h_{ij}^{n+1})$ 是 n 阶对称方阵，所以可设 $h_{ij}^{n+1}=\lambda_i\delta_{ij}$，由上式得，

$$\frac{1}{2}\Delta[\sum_{ij}(h_{ij}^{n+1})^2]=\frac{1}{2}\sum_{k}[\sum_{ij}(h_{ij}^{n+1})^2]_{kk}=\sum_{k}[\sum_{ij}h_{ij}^{n+1}h_{ijk}^{n+1}]_k$$
$$=\sum_{ijk}(h_{ijk}^{n+1})^2+\sum_{ij}h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1}$$
$$=\sum_{ijk}(h_{ijk}^{n+1})^2+\sum_{ijkm}h_{ij}^{n+1}(h_{mk}^{n+1}R_{mijk}+h_{im}^{n+1}R_{mkjk})$$
$$=\sum_{ijk}(h_{ijk}^{n+1})^2+\sum_{ik}\lambda_i(\lambda_k R_{kiik}+\lambda_i R_{ikik})$$
$$=\sum_{ijk}(h_{ijk}^{n+1})^2+\frac{1}{2}\sum_{ik}(\lambda_i-\lambda_k)^2R_{ikik}\geq 0$$

由 Hopf 引理得

$$\sum_{ij}(h_{ij}^{n+1})^2=const\,,\qquad \Delta(\sum_{ij}(h_{ij}^{n+1})^2)=0$$

由以上各式可得

$$h_{ijk}^{n+1}=0\,,\qquad h_{ij}^{n+1}=const$$
$$\sum_{ik}(\lambda_i-\lambda_k)^2R_{ikik}=0$$

因为 M^n 是正截面曲率子流形，即 $R_{ikik}>0$,所以由上式可得

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=H$$

即 $h_{ij}^{n+1}=H\delta_{ij}$，所以 M^n 是 S^{n+p} 的伪脐子流形. 证毕.

定理 1 的证明

首先证明以下等式

www.docin.com

$$\frac{1}{2}q+r=nR-\sum_{\alpha\neq n+1}[\sum_{ijkm}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})]+nH^2R \qquad (3.6)$$

利用 Gauss 方程（1.8）和（1.3）,直接计算可得

$$\frac{1}{2}q+r=\frac{1}{2}\sum_{ijkm}R_{ijkm}R_{ijkm}+\sum_{ij}(\sum_{k}R_{ikjk})(\sum_{k}R_{ikjk})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ijkm}K_{ijkm}R_{ijkm}+\sum_{ijkm}K_{ikjk}R_{imjm}+$$

$$\sum_{\alpha}[\frac{1}{2}\sum_{ijkm}(h_{ik}^{\alpha}h_{jm}^{\alpha}-h_{im}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha})R_{ijkm}+\sum_{ijkm}(h_{ij}^{\alpha}h_{kk}^{\alpha}-h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha})R_{imjm}]$$

$$\frac{1}{2}\sum_{ijkm}K_{ijkm}R_{ijkm}+\sum_{ijkm}K_{ikjk}R_{imjm}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ijkm}(\delta_{ik}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jk})R_{ijkm}+\sum_{ijkm}(\delta_{ij}\delta_{kk}-\delta_{ik}\delta_{kj})R_{imjm}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ijkm}\delta_{ik}\delta_{jm}R_{ijkm}-\frac{1}{2}\sum_{ijkm}\delta_{im}\delta_{jk}R_{ijkm}+\sum_{ijkm}\delta_{ij}\delta_{kk}R_{imjm}-\sum_{ijkm}\delta_{ik}\delta_{kj}R_{imjm}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ij}R_{ijij}-\frac{1}{2}\sum_{ij}R_{ijji}+n\sum_{im}R_{imim}-\sum_{im}R_{imim}=\mathrm{nR}$$

所以

$$\frac{1}{2}q+r=nR+\sum_{\alpha}[\frac{1}{2}\sum_{ijkm}(h_{ik}^{\alpha}h_{jm}^{\alpha}-h_{im}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha})R_{ijkm}+\sum_{ijkm}(h_{ij}^{\alpha}h_{kk}^{\alpha}-h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha})R_{imjm}] \qquad (3.7)$$

对于固定的α，选取适当的局部正交标架场$\{e_i\}$，使(h_{ij}^{α})对角化，即$h_{ij}^{\alpha}=\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$，现假定$\alpha\neq n+1$，有

$$\frac{1}{2}\sum_{ijkm}(h_{ik}^{\alpha}h_{jm}^{\alpha}-h_{im}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha})R_{ijkm}+\sum_{ijkm}(h_{ij}^{\alpha}h_{kk}^{\alpha}-h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha})R_{imjm}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ijkm}h_{ik}^{\alpha}h_{jm}^{\alpha}R_{ijkm}-\frac{1}{2}\sum_{ijkm}h_{im}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}R_{ijkm}+\sum_{ijkm}h_{ij}^{\alpha}h_{kk}^{\alpha}R_{imjm}-\sum_{ijkm}h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}R_{imjm}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ij}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}R_{ijij}-\frac{1}{2}\sum_{ij}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}R_{ijji}+0-\sum_{im}\lambda_i^{\alpha}\lambda_i^{\alpha}R_{imim}$$

$$=\sum_{ij}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}R_{ijij}-\sum_{ij}(\lambda_i^{\alpha})^2R_{ijij}=-\frac{1}{2}\sum_{ij}(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})^2R_{ijij} \qquad (3.8)$$

$$\sum_{ijkm}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})$$

$$= \sum_{ijkm} h_{ij}^{\alpha} h_{mk}^{\alpha} R_{mijk} + \sum_{ijkm} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk}$$

$$= \sum_{im} \lambda_i^{\alpha} \lambda_m^{\alpha} R_{miim} + \sum_{ik} \lambda_i^{\alpha} \lambda_i^{\alpha} R_{ikik}$$

$$= -\sum_{ij} \lambda_i^{\alpha} \lambda_j^{\alpha} R_{ijij} + \sum_{ij} (\lambda_i^{\alpha})^2 R_{ijij}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\lambda_i^{\alpha} - \lambda_j^{\alpha})^2 R_{ijij} \tag{3.9}$$

当$\alpha = n+1$时，由命题 2 得

$$\frac{1}{2} \sum_{ijkm} (h_{ik}^{n+1} h_{jm}^{n+1} - h_{im}^{n+1} h_{jk}^{n+1}) R_{ijkm} + \sum_{ijkm} (h_{ij}^{n+1} h_{kk}^{n+1} - h_{ik}^{n+1} h_{jk}^{n+1}) R_{imjm}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ijkm} h_{ik}^{n+1} h_{jm}^{n+1} R_{ijkm} - \frac{1}{2} \sum_{ijkm} h_{im}^{n+1} h_{jk}^{n+1} R_{ijkm} + \sum_{ijkm} h_{ij}^{n+1} h_{kk}^{n+1} R_{imjm} - \sum_{ijkm} h_{ik}^{n+1} h_{jk}^{n+1} R_{imjm}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} H^2 R_{ijij} - \frac{1}{2} \sum_{ij} H^2 R_{ijji} + nH^2 \sum_{im} R_{imim} - \sum_{im} H^2 R_{imim}$$

$$= nH^2 R \tag{3.10}$$

故,把（3.8）-(3.10)式代入（3.7）式可得（3.6）式.

利用 Gauss 方程（1.8）和（1.3）式得

$$\sum_{\alpha \neq n+1} \sum_{ijkm} h_{ij}^{\alpha} (h_{mk}^{\alpha} R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk})$$

$$= n\tau + nH^2 \tau + \sum_{\alpha \neq n+1} \sum_{\beta} [tr(H_\alpha H_\beta)^2 - tr(H_\alpha^2 H_\beta^2)] - \sum_{\alpha \neq n+1} \sum_{\beta} [tr(H_\alpha H_\beta)]^2 \tag{3.11}$$

其中，$\tau = \sum_{\alpha \neq n+1} \sum_{ij} (h_{ij}^{\alpha})^2$

又因为

$$H_{n+1} H_\alpha = H_\alpha H_{n+1} \tag{3.12}$$

$$\sum_{\alpha \neq n+1} [tr(H_\alpha H_{n+1})]^2 = 0 \tag{3.13}$$

所以

$$\frac{1}{2} q + r = nR - n\tau - nH^2 \tau + nH^2 R + \sum_{\alpha, \beta \neq n+1} [tr(H_\alpha^2 H_\beta^2) - tr(H_\alpha H_\beta)^2] + \sum_{\alpha, \beta \neq n+1} [tr(H_\alpha H_\beta)]^2$$

又因为

$$tr(H_\alpha^2 H_\beta^2) - tr(H_\alpha H_\beta)^2$$

$$= \sum_{ijkl} (h_{ij}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha} h_{kl}^{\beta} h_{li}^{\beta} - h_{ij}^{\alpha} h_{jk}^{\beta} h_{kl}^{\alpha} h_{li}^{\beta})$$

$$= \sum_{ik} (\lambda_i^{\alpha} \lambda_i^{\alpha} h_{ik}^{\beta} h_{ki}^{\beta} - \lambda_i^{\alpha} h_{ik}^{\beta} \lambda_k^{\alpha} h_{ki}^{\beta})$$

$$= \sum_{ik} [(\lambda_i^{\alpha})^2 - (\lambda_i^{\alpha})(\lambda_k^{\alpha})](h_{ik}^{\beta})^2 = \frac{1}{2} \sum_{ik} (\lambda_i^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha})^2 (h_{ik}^{\beta})^2 \geq 0$$

因而有

$$\sum_{\alpha,\beta \neq n+1} [tr(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2) - tr(H_{\alpha} H_{\beta})^2] \geq 0 \tag{3.14}$$

对于$\alpha, \beta \neq n+1$, 因为$H_{\alpha\beta} = (tr(H_{\alpha} H_{\beta}))$是(p-1)阶对称矩阵，所以可取法标架场，使得$tr(H_{\alpha} H_{\beta}) = trH_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}$，故

$$\sum_{\alpha,\beta \neq n+1} [tr(H_{\alpha} H_{\beta})]^2 = \sum_{\alpha \neq n+1} [trH_{\alpha}^2]^2 \geq \frac{1}{p-1} \tau^2 \tag{3.15}$$

因为M^n是常曲率空间S^{n+p}中的子流形，由 Gauss 方程(1.8)得，M^n的 Ricci 曲率张量的分量为

$$R_{ik} = \sum_j R_{ijkj} = (n-1)\delta_{ik} + \sum_{\alpha} \sum_j (h_{ik}^{\alpha} h_{jj}^{\alpha} - h_{ij}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha})$$

所以M^n的数量曲率为

$$R = \sum_i R_{ii} = n(n-1) + \sum_{\alpha} (trH_{\alpha})^2 - \sum_{\alpha} \sum_{ij} (h_{ij}^{\alpha})^2$$

$$= n(n-1) + n^2 H^2 - S$$

因为

$$R = n(n-1) + n^2 H^2 - (\tau + nH^2)$$

$$\geq n(n-1) - \tau$$

所以

$$\frac{1}{2} q + r \geq nR - n\tau - nH^2 \tau + nH^2 R + \frac{1}{p-1} \tau^2$$

$$\geq n^2(n-1) - 2n\tau - nH^2 \tau + nH^2 R + \frac{1}{p-1} \tau^2$$

又因为

$$nH^2 R \geq -nH^2 \tau$$

所以有

$$\frac{1}{2}q+r\geq n^2(n-1)-2n\tau-2nH^2\tau+\frac{1}{p-1}\tau^2 \qquad (3.16)$$

$$=\frac{1}{p-1}[\tau-n(p-1)(1+H^2)]^2+n^2(n-1)-n^2(p-1)(1+H^2)^2$$

$$\geq n^2(n-1)-n^2(p-1)(1+H^2)^2 \qquad (3.17)$$

注意到

$$r=\sum_{ij}(\sum_k R_{ikjk})^2\leq\sum_{ij}n\sum_k R_{ikjk}^2\leq n\sum_{ijkl}R_{ijkl}^2=nq \qquad (3.18)$$

所以有

$$(\frac{1}{2n}+1)q\geq n(n-1)-n(p-1)(1+H^2)^2 \qquad (3.19)$$

所以当定理的条件成立时，即$(\frac{1}{2n}+1)q\leq n(n-1)-n(p-1)(1+H^2)^2$，由（3.19）知必有$(\frac{1}{2n}+1)q=n(n-1)-n(p-1)(1+H^2)^2$，故（3.14）-(3.19)均取等号，所以（3.14）式变成$\sum_{\alpha,\beta=n+1}[tr(H_\alpha^2H_\beta^2)-tr(H_\alpha H_\beta)^2]=0$，再利用（3.12）式，可得

$$H_\alpha H_\beta=H_\beta H_\alpha, \qquad \forall\alpha,\beta \qquad (3.20)$$

(3.20)式意味着 M 的法丛平坦，所以$R_{\alpha\beta jk}=0$，由（3.1）和（3.5）并且$R_{ijij}\geq 0$，直接计算可得

$$\frac{1}{2}\Delta S=\sum_\alpha\sum_{ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2+\sum_\alpha\sum_{ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha$$

$$=\sum_\alpha\sum_{ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2+\sum_\alpha\sum_{ijkm}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha R_{mijk}+h_{im}^\alpha R_{mkjk})$$

$$=\sum_\alpha\sum_{ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2+\frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_{ij}(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)^2R_{ijij}\geq 0$$

由于 M 是紧致的，所以由 Hopf 原理可知，$h_{ijk}^\alpha=0,\forall\alpha,i,j,k$.即 M 具有平行的第二基本形式.并且对于固定的$\alpha$，有$\lambda_i^\alpha=\lambda_j^\alpha,\forall i,j$，所以若$\alpha\neq n+1,\sum_i\lambda_i^\alpha=0$，则$\lambda_i^\alpha=0$，故当$\alpha\neq n+1,h_{ij}^\alpha=0$，可得$\tau=0$，M 位于$S^{n+p}$的全测地子流形$S^{n+1}$中.又因为 M 是伪脐子流形，所以 M 是全脐子流形.

定理 1 证毕

www.docin.com

3. 2 定理 2 的证明

由命题 2 可知，球面S^{n+p}中具有平行中曲率向量的伪脐子流形是球面S^{n+p}中的具有平行中曲率向量的紧致正曲率子流的形的推广，作者继而研究了球面S^{n+p}中的具有平行中曲率向量的伪脐子流形.设M^n是等距浸入在(n+p)维球面S^{n+p}中紧致的具有平行中曲率向量的伪脐子流形.

在证明定理 2 之前，首先给出一个命题.

命题[8] 设 M 是S^{n+p}中的 n 维子流形,则有

$$\sum_k\Big(\sum_\alpha\sum_{ij}h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha\Big)^2\le S\sum_\alpha\sum_{ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2$$

证明 利用 Schwarz 不等式,有

$$\begin{aligned}\sum_k\Big(\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha\Big)^2&\le\sum_k\Big[\sum_{\alpha ij}(h_{ij}^\alpha)^2\cdot\sum_{\alpha ij}(h_{ijk}^\alpha)^2\Big]\\&=\sum_{\alpha ij}(h_{ij}^\alpha)^2\cdot\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2\\&=S\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2\end{aligned}$$

命题得证.

定理 2 的证明

张量h_{ij}^α的一次和二次共变导数分别定义为

$$\sum_k h_{ijk}^\alpha\omega_k=dh_{ij}^\alpha-\sum_k h_{ik}^\alpha\omega_{kj}-\sum_k h_{kj}^\alpha\omega_{ki}-\sum_\beta h_{ij}^\beta\omega_{\beta\alpha}\tag{3.21}$$

$$\sum_l h_{ijkl}^\alpha\omega_l=dh_{ijk}^\alpha-\sum_l h_{ljk}^\alpha\omega_{li}-\sum_l h_{ilk}^\alpha\omega_{lj}-\sum_l h_{ijl}^\alpha\omega_{lk}-\sum_\beta h_{ijk}^\beta\omega_{\beta\alpha}\tag{3.22}$$

因为 Codazzi 方程是$h_{ijk}^\alpha-h_{ikj}^\alpha=-K_{\alpha ijk}$，在常曲率空间中$K_{\alpha ijk}=0$，故

$$h_{ijk}^\alpha=h_{ikj}^\alpha\tag{3.23}$$

由文[5],

$$h_{ijkl}^\alpha-h_{ijlk}^\alpha=\sum_m h_{mj}^\alpha R_{mikl}+\sum_m h_{im}^\alpha R_{mjkl}-\sum_\beta h_{ij}^\beta R_{\alpha\beta kl}\tag{3.24}$$

用$\overline{H}$表示 M 的中曲率向量,假定e_{n+1}与$\overline{H}$平行, M 是伪脐的，意指

$$\alpha=n+1\text{时},\sum_i h_{ii}^\alpha=nH,\alpha>n+1\text{时},\sum_i h_{ii}^\alpha=0,h_{ij}^{n+1}=H\delta_{ij}\tag{3.25}$$

按照文献[5]的计算,可得

$$\sum_\alpha\sum_{ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha=\sum_\alpha\sum_{ijk}h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha+nS-\sum_\alpha(trH_\alpha)^2+\sum_{\alpha\beta}tr(H_\alpha^2H_\beta)trH_\beta$$

www.docin.com

$$-2\sum_{\alpha\beta}[tr(H_\alpha^2H_\beta^2)-tr(H_\alpha H_\beta)^2]-\sum_{\alpha\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2 \tag{3.26}$$

M 是具有平行中曲率向量的子流形,故由定理 1 的命题 1 可得

$$\sum_\alpha\sum_{ijk}h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha=0 \tag{3.27}$$

由(3.25)式

$$\sum_\alpha(trH_\alpha)^2=n^2H^2,\sum_{\alpha\beta}tr(H_\alpha^2H_\beta)trH_\beta=nH^2S \tag{3.28}$$

且由文献[7],当 p>1 时,有

$$-2\sum_{\alpha\beta}[tr(H_\alpha^2H_\beta^2)-tr(H_\alpha H_\beta)^2]-\sum_{\alpha\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2\ge-\frac{3}{2}S^2 \tag{3.29}$$

由于 M 是伪脐子流形,有

$$S\ge nH^2 \tag{3.30}$$

故,由(3.27)—(3.30)式,(3.26)式为

$$\sum_\alpha\sum_{ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha\ge(nH^2-\frac{3}{2}S)S \tag{3.31}$$

令 f 为任意的光滑函数, $f\neq0$,因为 λ_1 为 L 的最小特征值,则由方程 $Lf=\lambda f$,

$$\lambda_1\int_M f^2*1\le\int_M fL(f)*1 \tag{3.32}$$

对任意的常数 $a>0$,令

$$f_a=(S+a)^{\frac{1}{2}} \tag{3.33}$$

经过直接计算可得

$$\Delta f_a=\sum_k[(S+a)^{\frac{1}{2}}]_{kk}=\sum_k[(S+a)^{\frac{-1}{2}}\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha]_k$$

$$=-(S+a)^{\frac{-3}{2}}\sum_k(\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha)^2+(S+a)^{\frac{-1}{2}}\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2+(S+a)^{\frac{-1}{2}}\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha$$

$$\Delta f_a=(S+a)^{-\frac{3}{2}}[(S+a)\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2-\sum_k(\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha)^2]+(S+a)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha$$

$$\ge(S+a)^{-\frac{3}{2}}[S\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2-\sum_k(\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha)^2]+(S+a)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha \tag{3.34}$$

其中等号成立当且仅当$\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2=0$.

出命题和(3.34)式,有

$$\Delta f_a \geq (S+a)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha ij} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \tag{3.35}$$

把(3.31)式代入(3.35)式,有

$$\Delta f_a \geq (S+a)^{-\frac{1}{2}} (nH^2 - \frac{3}{2}S)S \tag{3.36}$$

于是

$$f_a \Delta f_a \geq (nH^2 - \frac{3}{2}S)S \tag{3.37}$$

从而有

$$f_a L(f_a) = -f_a \Delta f_a - \frac{3}{2} S f_a^2 \leq -(nH^2 - \frac{3}{2}S)S - \frac{3}{2}S(S+a)$$

$$= -(nH^2 + \frac{3}{2}a)S \tag{3.38}$$

由(3.32)式

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M f_a L(f_a) * 1}{\int_M f_a^2 * 1} \leq \frac{-(nH^2 + \frac{3}{2}a)\int_M S * 1}{\int_M (S+a) * 1} \tag{3.39}$$

由于 a 的任意性,在(3.39)式中令 $a \to 0$,即得

$$\lambda_1 \leq -nH^2$$

由定理 2 的条件 $\lambda_1 \geq -nH^2$ 知: $-nH^2 \leq \lambda_1 \leq -nH^2$

故

$$\lambda_1 = -nH^2$$

于是可知,(3.32)—(3.39)式所有的等号均成立,特别地,(3.34)式中等号成立,从而

$$\sum_{\alpha ijk} (h_{ijk}^{\alpha})^2 = 0$$

即

$$h_{ijk}^{\alpha} = 0, \forall \alpha, i, j, k$$

故 **M** 具有平行的第二基本形式.

由(3.22)式得

$$h_{ijkl}^{\alpha} = 0 \tag{3.40}$$

(3.40)式代入(3.24)式,并令 $l = i$,作和

www.docin.com

$$\sum_{im} h_{im}^{\alpha} R_{mjkl} + \sum_{im} h_{mj}^{\alpha} R_{mikl} = \sum_{\beta}\sum_{i} h_{ij}^{\beta} R_{\alpha\beta kl} \tag{3.41}$$

上式两端再乘h_{jk}^{α},作和

$$\sum_{\alpha}\sum_{ijkm} h_{jk}^{\alpha} h_{im}^{\alpha} R_{mjkl} + \sum_{\alpha}\sum_{ijkm} h_{jk}^{\alpha} h_{mj}^{\alpha} R_{mikl} = \sum_{\alpha\beta}\sum_{ijk} h_{jk}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} R_{\alpha\beta kl} \tag{3.42}$$

将 Gauss 方程(1.8)和 Ricci 方程(1.10)代入上式(c=1),有

$$\sum_{\alpha}\sum_{ijkm} h_{jk}^{\alpha} h_{im}^{\alpha} R_{mjkl}$$

$$= \sum_{\alpha}\sum_{ijkm} h_{jk}^{\alpha} h_{im}^{\alpha} [(\delta_{mk}\delta_{jl} - \delta_{mi}\delta_{jk}) + \sum_{\beta}(h_{mk}^{\beta} h_{jl}^{\beta} - h_{mi}^{\beta} h_{jk}^{\beta})]$$

$$= \sum_{\alpha}\sum_{im} h_{im}^{\alpha} h_{im}^{\alpha} - \sum_{\alpha}\sum_{ij} h_{jj}^{\alpha} h_{ii}^{\alpha} + \sum_{\alpha\beta} tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2 - \sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}H_{\beta})]^2$$

$$= S - n^2H^2 + \sum_{\alpha\beta} tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2 - \sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}H_{\beta})]^2$$

$$\sum_{\alpha}\sum_{ijkm} h_{jk}^{\alpha} h_{mj}^{\alpha} R_{mikl}$$

$$= \sum_{\alpha}\sum_{ijkm} h_{jk}^{\alpha} h_{mj}^{\alpha} [(\delta_{mk}\delta_{il} - \delta_{ml}\delta_{ik}) + \sum_{\beta}(h_{mk}^{\beta} h_{il}^{\beta} - h_{ml}^{\beta} h_{ik}^{\beta})]$$

$$= n\sum_{\alpha}\sum_{jm} h_{jm}^{\alpha} h_{mj}^{\alpha} - \sum_{\alpha}\sum_{ij} h_{ji}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha} + nH^2S - \sum_{\alpha\beta} tr(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2)$$

$$= nS - S + nH^2S - \sum_{\alpha\beta} tr(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2)$$

$$\sum_{\alpha\beta}\sum_{ijk} h_{jk}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} R_{\alpha\beta kl}$$

$$= \sum_{\alpha\beta}\sum_{ijk} h_{jk}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} [\sum_{l}(h_{lk}^{\alpha} h_{li}^{\beta} - h_{li}^{\alpha} h_{lk}^{\beta})]$$

$$= \sum_{\alpha\beta}\sum_{ijkl} (h_{jk}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} h_{lk}^{\alpha} h_{li}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} h_{li}^{\alpha} h_{lk}^{\beta})$$

$$= \sum_{\alpha\beta} tr(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2) - \sum_{\alpha\beta} tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2$$

所以(3.42)式变成

$$nS - n^2H^2 + nH^2S - \sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}H_{\beta})]^2 = 2\sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2) - tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2]$$

又因为文[5]

$$\sum_{\alpha\beta}[tr(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2) - tr(H_{\alpha}H_{\beta})^2] \geq 0$$

所以可得

www.docin.com

$$nS - n^2H^2 + nH^2S - \sum_{\alpha\beta}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2 \geq 0$$

由引理 2 可得

$$nS + nH^2S - \frac{1}{p}S^2 \geq 0$$

故

$$(n + nH^2 - \frac{1}{p}S)S \geq 0$$

因 $S \geq 0$,故

$$S \leq pn(1 + H^2)$$

定理 2 证毕.

www.docin.com

3.3 定理 3 和定理 4 的证明

我继而将外围空间推广到局部对称共形平坦黎曼流形，讨论了局部对称共形平坦黎曼流形中具有平行中曲率向量的 n 维紧致伪脐子流形，得到了这类子流形的两个内蕴刚性定理.

设 M^n 是等距浸入在 $(n+p)$ 维局部对称共形平坦黎曼流形 N^{n+p} 中具有平行中曲率向量的 n 维紧致伪脐子流形. T_c 和 t_c 分别表示 N^{n+p} 的 Ricci 曲率的上确界和下确界, H 为平均曲率, K 表示 N^{n+p} 的数量曲率， R_c 表示 M^n 的截面曲率的下确界.

定理 3 的证明

由假设条件, e_{n+1} 在法丛中平行,故同样有(3.25)式成立，并且有

$$\omega_{n+1,\alpha}=0 \tag{3.43}$$

外微分(3.43)式,按照(3.3)的做法，同样可得

$$R_{n+1\alpha jk}=0 \tag{3.44}$$

利用(1.10)式

$$R_{n+1\alpha jk}=K_{n+1\alpha jk}+\sum_i(h_{ij}^{n+1}h_{ik}^{\alpha}-h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{n+1})$$

因为外围空间是局部对称共形平坦黎曼流形，利用(1.4)式

$$K_{n+1\alpha jk}=\frac{1}{n+p-2}[\delta_{n+1j}K_{\alpha k}-\delta_{n+1k}K_{\alpha j}+K_{n+1j}\delta_{\alpha k}-K_{n+1k}\delta_{\alpha j}$$
$$-\frac{k}{n+p-1}(\delta_{n+1j}\delta_{\alpha k}-\delta_{n+1j}\delta_{\alpha j})$$

因为 $K_{n+1\alpha jk}=0$ 且 $R_{n+1\alpha jk}=0$,故有 $\sum_i(h_{ij}^{n+1}h_{ik}^{\alpha}-h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{n+1})=0$，即

$$H_{n+1}H_{\alpha}=H_{\alpha}H_{n+1} \tag{3.45}$$

另外,由文[8]中的(3.4)式,有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=2\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2-\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2)]-\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^2$$
$$+nH\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2H_{n+1})-\sum_{\alpha\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{n+1})]^2$$

$$-\frac{n}{n+p-2}\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{\beta}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}K_{\alpha\beta}+\frac{2n}{n+p-2}\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{ijk}h_{ij}^{\alpha}h_{ki}^{\alpha}K_{kj}$$

www.docin.com

$$+\frac{1}{n+p-2}(\sum_j K_{jj}-\frac{nK}{n+p-1})\sum_{\alpha=n+1}tr(H_\alpha^2) \tag{3.46}$$

因为 M 是伪脐的,即

$$h_{ij}^{n+1}=H\delta_{ij}$$

故有

$$nH\sum_{\alpha=n+1}tr(H_\alpha^2H_{n+1})=nH^2\tau \tag{3.47}$$

$$\sum_{\alpha=n+1}[tr(H_\alpha H_{n+1})]^2=0 \tag{3.48}$$

因矩阵$(tr(H_\alpha H_\beta))$是实对称的，故可以取法标架场$\{e_\alpha\}$，使其对角化，即

$$tr(H_\alpha H_\beta)=(trH_\alpha^2)\delta_{\alpha\beta} \tag{3.49}$$

对固定的α，令$h_{ij}^\alpha=\lambda_i^\alpha\delta_{ij}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{ijk}h_{ij}^\alpha h_{ki}^\alpha K_{kj}&=\sum_i(\lambda_i^\alpha)^2K_{ii}\\&\ge\sum_i(\lambda_i^\alpha)^2t_c=\sum_{ij}(h_{ij}^\alpha)^2t_c\end{aligned}$$

上式对α求和,有

$$\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ijk}h_{ij}^\alpha h_{ki}^\alpha K_{kj}\ge\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}(h_{ij}^\alpha)^2t_c=t_c\tau \tag{3.50}$$

另外,由文[8]中的(3.7)式,有

$$-\frac{n}{n+p-2}\sum_{\alpha=n+1}\sum_\beta\sum_{ij}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta K_{\alpha\beta}\ge-\frac{n}{n+p-2}T_c\tau \tag{3.51}$$

由(3.47)—(3.51)并由引理 1 得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha&\ge-\frac{3p-5}{p-1}\tau^2+nH^2\tau+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})\tau\\&\ge\tau[-\frac{3p-5}{p-1}S+nH^2+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})]\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha&\ge-(n+1)\sum_{\alpha,\beta=n+1}[tr(H_\alpha H_\beta)]^2+nH^2\tau+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})\tau\\&\ge\tau[-(n+1)S+nH^2+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})]\end{aligned} \tag{3.53}$$

故当定理 3 的条件成立时,由(3.52)式得

$$\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geq 0$$

故

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ijk}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geq 0$$

由 Hopf 引理得 $\Delta\tau=0$，故

$$\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ijk}(h_{ijk}^{\alpha})^2=0\,,\qquad \sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=0$$

故根据定理 3 的条件和（3.52）式可得

$$\tau[-\frac{3p-5}{p-1}S+nH^2+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})]=0$$

根据定理 3 的条件可知,$\tau=0$.又由于 M^n 是伪脐子流形,故 M^n 是全脐子流形.

定理 3 证毕.

定理 4 的证明

当定理 4 的条件成立时,由(3.53)式可得

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ijk}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geq 0$$

由 Hopf 引理得 $\Delta\tau=0$

故 $\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ijk}(h_{ijk}^{\alpha})^2=0$，$\sum_{\alpha=n+1}\sum_{ij}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=0$

www.docin.com

故根据定理 4 的条件和(3.53)式可得

$$\tau[-(n+1)S+nH^2+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})]=0$$

故由定理 4 的条件得 $\tau=0$，又由于 M^n 是伪脐子流形,故 M^n 是全脐子流形.

定理 4 证毕.

参考文献

[1] S.S.Chern,Do Carmo and S.Kobayashi..Minimal submanifold of a sphere with second fundamental form of constant length.Shiing-Shen Chern Selected Papers[M]Springer-Verleg, 1978.

[2] Yau Shing-tung. Submanifold with constant mean curvature[J]. Amer.J.Math.1976.

[3] N.Ejiri.Compact minimal submanifold of a spere with positive Ricci Curvature[J].Math .Soc.Japan,1979.

[4] 莫小欢.常曲率空间中具有平行中曲率向量的子流形[J].数学年刊，1988.

[5] 纪永强.子流形几何[M]. 北京: 科学出版社,2004.

[6] 吴传喜.Clifford 极小超曲面的一个特征[J].数学进展,1989.

[7] Li An-min,Li Jin-min.An intristic rigidity theorem for minimal submanifold in a sphere[J].Arch Math(Basel),1992.

[8] 徐兆棣.局部对称共形平坦黎曼流形中的紧致子流形[J]. 数学研究与评论,1996.

[9] Chen Bang-yan. Some result of Chern-Docarmo-Kobayashi type and length of the second fundamental form[J].Indian Univ.Math ,1971.

[10] Song Wei-dong,He Guo-qing.On some glodal pinching theorems for minimal submanifolds of a locally symmetric space[J].纯粹数学与应用数学，2006.

[11] 王琪.局部对称共形平坦黎曼流形中紧致极小子流形的一个刚性定理[J].数学研究与评论，2006.

[12] 欧阳崇珍.球面的平行平均曲率子流形[J]. 数学杂志,2000.

[13] 宋卫东.关于具有平行第二基本形式的伪脐子流形[J].数学物理学报，2000.

[14] 黄宣国.某些特殊曲面和子流形的等周不等式[J].数学年刊，1998.

[15] 水乃翔,吴国强.局部对称黎曼流形中的极小超曲面[J].数学年刊，1995.

[16] 沈一兵.全实极小子流形的数量曲率[J].数学年刊,1991.

[17] 舒世昌.局部对称共形平坦黎曼流形上极小子流形的内蕴刚性积分不等式[J].陕西师范大学学报，2000.

[18] 王美娇,李世杰.单位球面中具有平行中曲率向量的子流形[J].数学研究与评论，2003.

[19] 蔡开仁. 球面中极小子流形的整体刚性定理[J].工程数学学报，2003.

[20] 吴炳烨. 球面全脐子流形的 Pinching 常数[J].浙江师范大学学报，1996.

[21] 张剑锋. 局部对称共形平坦黎曼流形上的紧致子流形[J].数学杂志，2004.

[22] 蔡开仁. 球面中平行平均曲率曲面的整体刚性定理[J].杭州师范学院学报，2002.

[23] 毛小兵. 局部对称共形平坦黎曼流形上的极小子流形[J].南昌大学学报，2003.

[24] 王美娇. 球空间具有平行单位平均曲率向量的完备子流形[J].广州大学学报，2004.

[25] 陈维桓，李兴校. 黎曼几何引论[M].北京：北京大学出版社，2002.

[26] 伍鸿熙，沈纯理. 黎曼几何初步[M].北京：北京大学出版社，1989.

www.docin.com

致　　谢

在论文完成之际，首先衷心感谢导师陈抚良教授的悉心指导和耐心帮助。三年来，先生严谨创新的学风和爱生如子的情怀影响作者最深，并将永远是作者今后做人和做学问的榜样。

感谢闻家君同学、吴清华同学。三年来与他们在一起共同学习和生活让我受益匪浅。

同时，也感谢江西师范大学三年来给予我帮助的其他各位老师和同学们。

www.docin.com

本账号发布文档来源于互联网和个人收集，仅用于技术分享交流，版权为原作者所有。如果侵犯了您的知识版权，请提出指正，我们将立即删除相关资料。免费格式转换请发豆丁站内信。

网易博客http://turui.blog.163.com/

腾讯微博http://t.qq.com/turuizx

新浪微博http://weibo.com/hiyoho

直接联系QQ2218108823

docin 豆丁

www.docin.com